Волновые уравнения для одномерных упругих волн

Рассмотрим одномерные волны, распространяющиеся в упругой среде.

1) Представим упругую струну, чья форма задается графиком функции $\xi = \xi(x,t)$. Волна, распространяющаяся по струне, будет поперечной: каждая точка струны будет смещаться по оси ξ при распространении волны вдоль оси x. Выделим на оси x малый участок dx (координаты крайних точек: x и $x+dx$). Поскольку dx бесконечно мал, длину струны на этом участке тоже можно положить равной dx. Запишем второй закон Ньютона для участка dx (в проекции на ось ξ):

$$ma = F \tag{1}$$

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = F \tag{2}$$

F – проекция суммарной силы натяжения, действующей на участок струны dx со стороны прилежащих к нему других участков струны. Обозначим модули двух сил натяжения через $F_н$. Углы между этими силами и положительным направлением оси ξ обозначим через φ и φ'. Таким образом, второй закон Ньютона:

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = F_н(\sin\varphi' - \sin\varphi) \tag{3}$$

Из-за малости dx, можно положить $\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi$ и $\sin\varphi' = \operatorname{tg}\varphi'$. Тангенсы этих углов легко выразить через углы наклона касательных к графику функции $\xi(x,t)$ (к струне). Получаем:

$$\sin\varphi' = \operatorname{tg}\varphi' = \frac{\partial\xi(x+dx,t)}{\partial x} \tag{4}$$

$$\sin\varphi = \operatorname{tg}\varphi = \frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x} \tag{5}$$

Отсюда:

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = F_н(\frac{\partial\xi(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x}) \tag{6}$$

В скобках справа – часть полного дифференциала функции $\frac{\partial\xi}{\partial x}$, соответствующая частной производной по ∂x:

$$\frac{\partial\xi(x+dx,t)}{\partial x} - \frac{\partial\xi(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx \tag{7}$$

Распишем m – массу участка струны dx – через линейную плотность $\rho = \rho l = \rho dx$:

$$\rho\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2}dx = F_н\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx \tag{8}$$

Сократив на dx и объединив коэффициенты, получим:

$$\frac{\rho}{F_н}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \tag{9}$$

Получили волновое уравнение для одномерных поперечных волн, распространяющихся по упругой струне.

2) Представим трубку с идеальным газом и продольную волну, распространяющуюся в ней по оси x (параллельно стенкам). Если рассмотреть объем V_0, ограниченный стенками и перпендикулярными им плоскостями с абсциссами x и $x+dx$, а затем объем V, который будет заключен между этими плоскостями по прохождении времени t (координаты смещенных плоскостей будут равны $x+\xi(x,t)$ и $x+dx+\xi(x+dx,t)$ соответственно), выяснится, что эти объемы равны:

$$V_0 = Sdx \tag{10}$$

$$V = S(dx + \xi(x+dx,t) - \xi(x,t)) \tag{11}$$

Здесь S – площади перпендикулярных плоскостей, ограниченных трубкой (считаем, что обе они равны S – трубка не расширяется и не сужается). Проведя аналогичные п. 1 рассуждения про часть полного дифференциала, получаем:

$$V = S(dx + \frac{\partial\xi}{\partial x}dx) = (1 + \frac{\partial\xi}{\partial x})Sdx \tag{12}$$

Запишем второй закон Ньютона для объема V в проекции на x:

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = F \tag{13}$$

F – проекция суммарной силы давления, действующей на объем V со стороны остального газа (поскольку газ идеальный, эта сила по третьему закону Ньютона равна по модулю силе, действующей на газ со стороны объема V):

$$F = pS \tag{14}$$

Требуется найти давление внутри объема V. Пусть в объеме V_0 давление равно p_0. Считаем, что волна распространяется довольно быстро – это значит, что термодинамические процессы, происходящие в рассматриваемых объемах, можно считать адиабатическими. Запишем уравнение Пуассона для наших объемов:

$$p_0 V_0^\gamma = pV^\gamma \tag{15}$$

Отсюда:

$$p = p_0(\frac{V_0}{V})^\gamma = p_0\frac{Sdx}{(1+\frac{\partial\xi}{\partial x})Sdx} = (1+\frac{\partial\xi}{\partial x})^{-\gamma} \tag{16}$$

Давление в пределах элелементарных объемов изменяется слабо. Из этих соображений можно представить его в виде суммы первых двух членов его разложения в ряд Тейлора:

$$p = p_0(1+\frac{\partial\xi}{\partial x})^{-\gamma} = p_0(1-\gamma\frac{\partial\xi}{\partial x}) \tag{17}$$

Второй закон Ньютона для выделенного объема:

$$m\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = p_0(1-\gamma\frac{\partial\xi}{\partial x})S \tag{18}$$

Выразим массу через плотность газа $\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{Sdx}$:

$$\rho Sdx\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = p_0(1-\gamma\frac{\partial\xi}{\partial x})S \tag{19}$$

Разделим на Sdx, объединим коэффициенты:

$$\frac{\rho}{\gamma p_0}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \tag{20}$$

Получили волновое уравнение для одномерных продольных волн, распространяющихся в идеальном газе.

3) Представим прямой твердый стержень. Аналогично предыдущему случаю, выделим в нем объем, ограниченный плоскостями, перпендикулярными границам стержня (абсциссы этих плоскостей равны x и $x+dx$), а также объем, заключенный между смещенными плоскостями (абсциссы $x+\xi(x,t)$ и $x+dx+\xi(x+dx,t)$).

Второй закон Ньютона для выделенного объема имеет вид:

$$\rho V\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = F \tag{21}$$

При малых деформациях $\varepsilon = \frac{\partial\xi}{\partial x}$ нормальное напряжение σ пропорционально величине деформации (E – модуль Юнга):

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{\partial\xi}{\partial x} \tag{22}$$

Деформация ε есть относительное удлинение $\frac{\Delta l}{l_0}$, а нормальное напряжение $\sigma = \frac{F}{S}$. Таким образом:

$$F = (\sigma_2-\sigma_1)S = ES(\frac{\partial\xi(x+dx+\xi(x+dx))}{\partial x} - \frac{\partial\xi(x+\xi(x,t))}{\partial x}) = ES\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2}dx \tag{23}$$

Вернемся ко второму закону Ньютона:

$$\rho V\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = EV\frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \tag{24}$$

$$\frac{\rho}{V}\frac{\partial^2\xi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2\xi}{\partial x^2} \tag{25}$$

Получили волновое уравнение для одномерных продольных упругих волн, распространяющихся в твердом стержне.